پاسخنامه تشریحی فصل پانزدهم

آزمون جامع ۱

۱. گزینه‌ی «۱» یادمان باشد که در محاسبه‌ی مشتق توابع، ساده‌سازی بر مشتق‌گیری ارجحیت دارد. پس ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \text{Ln}\sqrt{\tan x} = \text{Ln}(\tan x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\text{Ln}(\tan x)$$

$$\xrightarrow{(\text{Ln } u)' = \frac{u'}{u}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \times \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \times \frac{1+1}{1} = 1$$

۲. گزینه‌ی «۳» با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت داده شده، مشتق تابع $y = f(x)f(-x)$ است، زیرا طبق مشتق ضرب دو تابع داریم:

$$y' = f'(x)f(-x) + f(x)\big(f(-x)\big)' \Rightarrow$$

$$y' = f'(x)f(-x) + f(x)\big(-f'(-x)\big)$$

$$\Rightarrow y' = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

پس کافی است ابتدا ضابطه‌ی $f(-x)$ را به‌دست آورده و آن را در $f(x)$ ضرب کرده تا ضابطه‌ی ساده شده‌ی تابع y را بیابیم:

$$f(x) = x^5 + \sqrt{x^{10} + 3x^2} \Rightarrow f(-x) = -x^5 + \sqrt{x^{10} + 3x^2}$$

پس توابع $f(x)$ و $f(-x)$ مزدوج هم هستند، در نتیجه داریم:

$$y = f(x)f(-x) = (\sqrt{x^{10} + 3x^2})^2 - (x^5)^2$$

$$= x^{10} + 3x^2 - x^{10}$$

$$\Rightarrow y = 3x^2 \Rightarrow y' = 6x$$

۳. گزینه‌ی «۴» منحنی داده شده یک منحنی ضمنی است. با محاسبه‌ی مشتق و جایگذاری نقطه‌ی داده شده در آن، شیب خط مماس به‌دست می‌آید و می‌دانیم که برای پیدا کردن شیب خط قائم کافی است شیب خط مماس را قرینه و معکوس نماییم:

$$\sqrt{x+y} - x + y = 0 \Rightarrow F'(x,y) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 1 + 0}{\frac{1}{2\sqrt{x+y}} - 0 + 1}$$

$$\Rightarrow m_T = F'(3,1) = -\frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} \Rightarrow m_N = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_N = -\frac{5}{3} \\ A(3,1) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط قائم}} y - 1 = -\frac{5}{3}(x-3)$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی «۴» در معادله‌ی خط فوق صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=0} y - 1 = -\frac{5}{3}(0-3) \Rightarrow y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (0,6) \in \text{خط}$$

۴. گزینه‌ی «۳» ابتدا مشتق تابع $h(x)$ را به کمک مشتق تابع مرکب می‌یابیم:

$$h'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big) \xrightarrow{x=2} h'(2)$$

$$= f'(2) \times g'\big(f(2)\big) \quad (*)$$

از روی نمودار تابع f داریم:

$$f(2) = 3 \xrightarrow{(*)} h'(2) = f'(2)g'(3) \quad (**)$$

می‌دانیم که مشتق تابع در هر نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه است، پس برای محاسبه‌ی $f'(2)$ و $g'(3)$ باید شیب خطوط مماس بر این دو تابع را در نقاط ۲ و ۳ بیابیم، برای تابع f دو نقطه‌ی $(-2,0)$ و $(2,3)$ واقع بر خط مماس هستند، پس:

$$f'(2) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-3}{-2-2} = \frac{3}{4}$$

تابع $g(x)$ یک تابع خطی است که کافی است شیب آن را بیابیم:

$$\begin{cases} (2,3) \in g \\ (4,0) \in g \end{cases} \Rightarrow m = g'(3) = \frac{3-0}{2-4} = -\frac{3}{2}$$

با جایگذاری در (**) داریم:

$$h'(2) = (\frac{3}{4})(-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{8}$$

۵. گزینه‌ی «۴» عبارت داده شده مشتق تابع $f(x)g(x)$ است، پس ابتدا تابع f.g را تشکیل داده و آن را ساده نموده و سپس مشتق تابع را می‌یابیم:

$$f(x).g(x) = \sqrt{x^3\sqrt{x}} \times \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{(x^3 \times x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{x \times x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}}$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = x^{\frac{7}{4}} \div x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{7}{4} - \frac{4}{3}} = x^{\frac{5}{12}} \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = \frac{5}{12}x^{-\frac{7}{12}}$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = \frac{5}{12}$$

۶. گزینه‌ی «۱» برای نوشتن معادله‌ی خط مماس بر هر تابعی در $x = a$ کافی است ابتدا با محاسبه‌ی مشتق تابع، شیب خط مماس را بیابیم. در این سؤال تابع داده شده $f(x^2)$ است، لذا داریم:

$$y = f(x^2) \Rightarrow y' = 2x f'(x^2) \Rightarrow$$

$$m_T = y'(2) = 2 \times 2 \times f'(4) \Rightarrow m_T = 4f'(4)$$

$$\xrightarrow{f'(4)=1} m_T = 4$$

حال باید مختصات نقطه‌ی تماس را بیابیم. در سؤال طول نقطه‌ی تماس برابر ۲ است، پس:

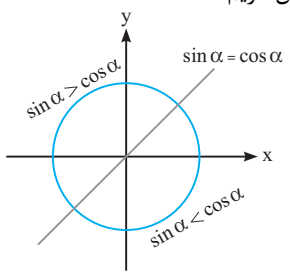
$$y = f(x^2) \xrightarrow{x=2} y(2) = f(4) \xrightarrow{f(4)=2} y(2) = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{T(2,2)}_{\text{نقطه‌ی تماس}}$$

حال با معلوم بودن شیب خط مماس و نقطه‌ی تماس می‌توانیم معادله‌ی خط مماس را بیابیم:

$$\begin{cases} m_T = 4 \\ T(2,2) \end{cases} \Rightarrow y - 2 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x - 6$$

۷. گزینه‌ی «۳» ابتدا عبارت $(\sin x - \cos x)$ را در همسایگی راست $x = \frac{\pi}{4}$ تعیین علامت می‌کنیم. با توجه به خط مقایسه‌ی سینوس و کسینوس مطابق شکل داریم:



وقتی $x \to \frac{\pi}{4}^+$، بالای خط $\sin\alpha = \cos\alpha$ قرار داریم و در نتیجه $\sin\alpha > \cos\alpha$ بوده و در نتیجه $\sin\alpha - \cos\alpha > 0$ است، پس ضابطه‌ی تابع در همسایگی راست $\frac{\pi}{4}$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y = a\,|\underbrace{\sin x - \cos x}_{\text{مثبت}}| = a(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow y' = a(\cos x + \sin x) \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4}) = a(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\Rightarrow 1 = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸. گزینه‌ی «۱» یادآوری:

$$\begin{cases} y = \sin u \Rightarrow y' = u'\cos u \quad (*) \\ y = a^u \Rightarrow y' = u' a^u \operatorname{Ln} a \quad (**) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2^{\cos x} \xrightarrow{(**)} y' = (-\sin x) \Rightarrow (2^{\cos x})\operatorname{Ln} 2 \quad (***) \\ y = \sin(2^{\cos x}) \xrightarrow{(*)} y' = (2^{\cos x})'\cos(2^{\cos x}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(***)} y' = (-\sin x)(2^{\cos x})(\operatorname{Ln} 2)\cos(2^{\cos x})$$

$$\Rightarrow y'(0) = 0$$

۹. گزینه‌ی «۲» شیب‌خط مماس بر منحنی در هر نقطه برابر مشتق تابع در آن نقطه است، پس: $y' = 3x^2 + 3 = m_T$

و شیب‌خط داده‌شده نیز برابر است با:

$$x + 6y = 1 \Rightarrow 6y = -x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6} \Rightarrow m = -\frac{1}{6}$$

و شرط عمود بودن دو خط این است که شیب این دو خط قرینه و معکوس هم باشد، یعنی: $m_T = -\frac{1}{m} \Rightarrow 3x^2 + 3 = -\frac{1}{-\frac{1}{6}} = 6$

$$\Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

با جایگذاری در تابع، مختصات نقطه‌ی خواسته شده به‌دست می‌آید:

$$y = x^3 + 3x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 + 3 = 4 \Rightarrow (1, 4) \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 - 3 = -4 \Rightarrow (-1, -4) \end{cases}$$

۱۰. گزینه‌ی «۲» کافی است زاویه‌ی بین خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی تلاقی نمودار تابع با محور xها را بیابیم:

$$y = \frac{x}{e^x} \xrightarrow[\text{تلاقی با محور xها}]{y = 0} 0 = \frac{x}{e^x} \Rightarrow x = 0$$

حال با محاسبه‌ی مشتق تابع، شیب خط مماس را می‌یابیم:

$$y = \frac{x}{e^x} \Rightarrow y = \overbrace{x}^{\text{عامل صفر}} \times \frac{1}{e^x} \Rightarrow y'(0) = 1 \times \frac{1}{e^0} = 1 = m_T$$

می‌دانیم که شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، پس: $\Rightarrow m_T = \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

آزمون جامع ۲

۱. گزینه‌ی «۲»

$$f(x) = (\sin x + \cos x)^4$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^3$$

با توجه به این‌که سینوس و کسینوس زاویه‌ی $\frac{\pi}{8}$ را نمی‌دانیم، باید ضابطه‌ی $f'(x)$ را ساده کنیم.

با توجه به فرمول $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$، تابع $f'(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f'(x) = 4\underbrace{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(\cos^2 x - \sin^2 x)(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\underbrace{\sin x \cos x}_{\sin 2x})$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(\cos 2x)(1 + \sin 2x)$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{8}) = 4\cos(\frac{2\pi}{8})(1 + \sin\frac{2\pi}{8})$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{8}) = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2} + 2$$

۲. گزینه‌ی «۲» با توجه به فرمول گفته شده برای مشتق توابع مثلثاتی توان‌دار، داریم:

$$y = \cos^2(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4x}) \Rightarrow y' = 2 \times (\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{x})'(-\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4x}))$$

$$\times \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4x})$$

$$\Rightarrow y' = 2(0 + \frac{1}{4} \times \frac{-1}{x^2})(-\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4x}))\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4x})$$

با توجه به فرمول $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ و با انتخاب $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4x}$ داریم:

$$y' = \frac{1}{4x^2}\sin\left(2(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4x})\right) = \frac{1}{4x^2}\sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2x})$$

$$\Rightarrow y'(\frac{3}{\pi}) = \frac{1}{4(\frac{3}{\pi})^2}\sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2 \times \frac{3}{\pi}})$$

$$\Rightarrow y'(\frac{3}{\pi}) = \frac{1}{4 \times \frac{9}{\pi^2}}\sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow y'(\frac{3}{\pi}) = \frac{\pi^2}{36}\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi^2}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{72}$$

۳. گزینه‌ی «۲» شیب خط قائم بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول (۳) برابر $\frac{-1}{f'(3)}$ می‌باشد. با توجه به فرضیات مسأله داریم:

$$y=f(\sqrt{6x+3}) \Rightarrow y'=\frac{6}{2\sqrt{6x+3}}f'(\sqrt{6x+3})$$

$$\xrightarrow{y'(1)=-4} -4=\frac{3}{\sqrt{6+3}}f'(\sqrt{6+3}) \Rightarrow -4=f'(3)$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط قائم}=-\frac{1}{f'(3)}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

۴. گزینه‌ی «۳» شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است. بنابراین:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(a\sqrt{x}+\text{Ln}\,x)=a\sqrt{1}+\text{Ln}\,(1)=a+0=a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(e^{x^2-x}+bx)=e^0+b=1+b$$

لذا برای پیوسته بودن تابع در $x=1$ داریم:

$$a=1+b \quad (1)$$

$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}+\text{Ln}\,x \ ; \ x\geq 1 \\ e^{x^2-x}+bx \ ; \ x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x} \ ; \ x>1 \\ (2x-1)e^{x^2-x}+b \ ; \ x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1^+)=\frac{a}{2}+1 \\ f'(1^-)=(2-1)e^0+b=1+b \end{cases}$$

و می‌دانیم که شرط مشتق‌پذیری تابع در $x=1$ آن است که $f'(1^+)=f'(1^-)$، پس:

$$\frac{a}{2}+1=1+b \xrightarrow{(1)} \frac{a}{2}+1=a \Rightarrow a=2$$

با جایگذاری در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$2=1+b \Rightarrow b=1 \Rightarrow a+b=3$$

۵. گزینه‌ی «۴» مشتق x برحسب y، یعنی x تابعی برحسب y است. بنابراین:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{f'_y}{f'_x}$$

$$f(x,y)=\tan(xy)+\cos(xy)-1$$

$$\Rightarrow \frac{d_x}{d_y}=-\frac{x(1+\tan^2 xy)-x\sin xy}{y(1+\tan^2 xy)-y\sin xy}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{x\left\{1+\tan^2 xy-\sin xy\right\}}{y\left\{1+\tan^2 xy-\sin xy\right\}}=-\frac{x}{y}$$

۶. گزینه‌ی «۲» حجم یک کره به شعاع R برابر است با:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

سرعت افزایش حجم در حقیقت همان آهنگ لحظه‌ای حجم یا $\frac{dv}{dt}$ است.

با توجه به این که $R=3t$ می‌باشد، حجم بادکنک برحسب زمان به صورت زیر قابل بیان است:

$$V=\frac{4}{3}\pi(3t)^3=36\pi t^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=36\pi(3t^2)$$

$$\xrightarrow{t=2s} \frac{dv}{dt}=36\pi(3\times 4)=432\pi$$

۷. گزینه‌ی «۳» ابتدا مقدار $[2x+1]$ را در همسایگی راست و چپ عدد (۱) به‌دست می‌آوریم:

الف) همسایگی راست $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+}[2x+1]=[3^+]=3$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-1)(3) \Rightarrow f'_+(1)=3$$

ب) همسایگی چپ $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-}[2x+1]=\left[3^-\right]=2$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-1)(2) \Rightarrow f'(1^-)=2$$

$$\Rightarrow f'_+(1)-f'_-(1)=3-2=1$$

۸. گزینه‌ی «۲» دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است، با محاسبه‌ی مشتق تابع داریم:

$$y'=\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \Rightarrow D_{y'}=R-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

پس تابع داده شده در ریشه‌های مخرج مشتق ندارد، یعنی:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

بنابراین، تابع در دو نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۹. گزینه‌ی «۴» عبارت داده شده مشتق تابع $fog(x)$ در $x=\frac{\pi}{12}$ است.

پس ابتدا تابع $fog(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$fog(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

از فرمول‌های $(\alpha+\beta)$ می‌دانیم که $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ برابر $\tan(\frac{\pi}{4}+x)$ می‌باشد، پس:

$$fog(x)=\tan(\frac{\pi}{4}+x) \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)\times f'\left(g(x)\right)=$$

$$1+\tan^2(\frac{\pi}{4}+x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} g'(\frac{\pi}{12})\times f'\left(g(\frac{\pi}{12})\right)=1+\tan^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12})$$

$$=1+\tan^2(\frac{3\pi+\pi}{12})=1+\tan^2(\frac{\pi}{3})=1+(\sqrt{3})^2=4$$

۱۰. گزینه‌ی «۴» کافی است تعریف مشتق تابع را در $x=1$ بنویسیم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sin\frac{1}{x-1}-0}{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\sin(\frac{1}{x-1})=\sin(\frac{1}{0})=\sin\infty \quad \text{وجود ندارد}$$

پس مشتق‌پذیر نیست، برای بررسی پیوستگی داریم: $f(1)=0$

$=0$ تابع کراندار پس پیوسته می‌باشد.

$$\lim_{x\to 1}F(x)=(1-1)\times\sin(\frac{1}{0})=0\times\sin\infty=0\times \text{کراندار}=0 \text{ تابع}$$

پس پیوسته می‌باشد.

آزمون جامع ۳

۱. گزینه‌ی «۱» ابتدا تعریف مشتق تابع را در $x=2$ می‌نویسیم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-1)(x-2)^2(4x+1)^3}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\sqrt{(x-1)(4x+1)^3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\sqrt{(x-1)(4x+1)^3}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}\times\sqrt{(2-1)(8+1)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}\times 27$$

$$\Rightarrow f'(x)=27\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$$

$$\Rightarrow f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}f'(x)=27\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=27$$

$$\Rightarrow f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}f'(x)=27\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-27$$

$$\Rightarrow f'(2^+)-f'(2^-)=27-(-27)=54$$

۲. گزینه‌ی «۲» از فرمول مشتق زنجیره‌ای یا تابع مرکب داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}\quad(*)$$

بنابراین:

$$y=u+4u^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{dy}{du}=1+4\times(-\frac{1}{2})u^{-\frac{3}{2}}\quad(1)$$

$$u=4\tan\frac{\pi}{2x}\Rightarrow\frac{du}{dx}=4\times(\frac{\pi}{2x})'(1+\tan^2\frac{\pi}{2x})=4\times\frac{\pi}{2}(-\frac{1}{x^2})(1+\tan^2\frac{\pi}{2x})$$

$$\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{-2\pi}{x^2}(1+\tan^2\frac{\pi}{2x})\quad(2)$$

$$x=2\Rightarrow u=4\tan\frac{\pi}{2\times 2}=4\tan\frac{\pi}{4}=4\times 1=4$$

با جایگذاری $u=4$ و $x=2$ در رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{dy}{du}=1+4\times(-\frac{1}{2})(4)^{-\frac{3}{2}}=1-2(2^2)^{-\frac{3}{2}}=1-2(2^{-3})=1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{-2\pi}{(2)^2}(1+\tan^2\frac{\pi}{2\times 2})=-\frac{\pi}{2}(1+1)=-\pi$$

و با توجه به رابطه‌ی (*) داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}\times(-\pi)=-\frac{3\pi}{4}$$

۳. گزینه‌ی «۱» آهنگ لحظه‌ای همان مشتق تابع است، پس در این سؤال کافی است مشتق منحنی ضمنی را به‌دست آوریم و سپس نقطه‌ی داده شده را جایگزین نماییم:

$$F(x,y)=\text{Ln}x+\text{Ln}y-2y^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{1}{x}+0-0}{0+\frac{1}{y}-4y}$$

$$\xrightarrow{(e^2,1)}\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{e^2}}{\frac{1}{1}-4\times 1}=\frac{1}{3e^2}=\frac{e^{-2}}{3}$$

۴. گزینه‌ی «۱» ابتدا عبارت‌های داخل قدر مطلق را تعیین علامت نموده و سپس با حذف علامت قدر مطلق، ضابطه‌ی تابع را ساده کرده و سپس مشتق تابع را می‌یابیم:

* $x\to 0^-$، در دایره‌ی مثلثاتی در ناحیه‌ی چهارم واقع شده و در نتیجه سینوس در این ناحیه منفی بوده و داریم:

$$x\to 0^-:|\sin x|=-\sin x$$

* برای x^2-x هم داریم:

$$x^2-x=0\Rightarrow x=0,1\Rightarrow$$

x		0		1	
x^2-x	+		−		+

با توجه به جدول تعیین علامت مشاهده می‌کنیم که عبارت (x^2-x) در سمت چپ $x=0$ مثبت بوده و در نتیجه:

$$x\to 0^-:|x^2-x|=x^2-x$$

لذا در همسایگی چپ $x=0$ داریم:

$$y=-\sin x+x^2-x\Rightarrow y'=-\cos x+2x-1$$

$$\Rightarrow y'(0^-)=-1+0-1=-2$$

۵. گزینه‌ی «۲» کافی است از رابطه‌ی داده شده مشتق بگیریم:

$$g(x^2+x)=f(x^3)+f(\frac{1}{x})\xrightarrow[f(u)\to u'f'(u)]{\text{مشتق تابع مرکب}}$$

$$(2x+1)g'(x^2+x)=3x^2f'(x^3)+(\frac{-1}{x^2})f'(\frac{1}{x})\xrightarrow{x=1}$$

$$3g'(2)=3f'(1)-f'(1)\xrightarrow{g'(2)=4}3\times 4=2f'(1)$$

$$\Rightarrow f'(1)=6$$

۶. گزینه‌ی «۳» آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در واحد تغییر x یعنی همان $f'(x)$، پس:

$$f'(2)=-\frac{3}{2}\quad(1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2+h)}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{h\to 0}\frac{0-f'(2+h)}{1}=-f'(2)\overset{(1)}{=\!=}\frac{3}{2}$$

۷. گزینه‌ی «۳» برای مشتق‌پذیری در $x_0 = 2$، باید در این نقطه پیوسته باشد، پس:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2ax^2+bx) = 8a+2b \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(ax+1) = 2a+1\end{cases} \Rightarrow 8a+2b=2a+1$$

$$\Rightarrow 6a+2b=1 \quad (1)$$

حال مشتق‌های راست و چپ هم باید با هم برابر باشند، پس:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax+b & x>2 \Rightarrow f'(2^+) = 8a+b \\ a & x<2 \Rightarrow f'(2^-) = a\end{cases}$$

$$\Rightarrow 8a+b=a \Rightarrow 7a+b=0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \begin{cases} 7a+b=0 \\ 6a+2b=1\end{cases} \to b=-7a$$

با جایگذاری در رابطه‌ی پایینی داریم:

$$6a+2(-7a)=1 \Rightarrow 6a-14a=1 \Rightarrow -8a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{8}$$

$$\to b=-7a=\frac{7}{8} \Rightarrow b-a=\frac{7}{8}-(-\frac{1}{8})=1$$

۸. گزینه‌ی «۳»

$$\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{f'(x)}{f'(y)}=-\frac{\frac{-\sqrt{y}}{x^2}+\frac{y}{2\sqrt{x}}-0}{\frac{1}{2\sqrt{yx}}+\sqrt{x}-0}$$

$$\xrightarrow{(1,4)} \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{-2}{1}+\frac{4}{2\times 1}}{\frac{1}{2\times 2\times 1}+1}=-\frac{0}{\frac{1}{4}+1}=0$$

۹. گزینه‌ی «۱» عبارت داده شده مشتق تابع $f+g$ است، پس ابتدا تابع $f(x)+g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)+g(x)=\frac{-1+e^{2x}+e^x+1}{e^x+1}=\frac{e^{2x}+e^x}{e^x+1}=\frac{e^x(e^x+1)}{e^x+1}=e^x$$

$$\Rightarrow f(x)+g(x)=e^x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)+g'(x)=e^x$$

۱۰. گزینه‌ی «۱» ابتدا با توجه به رابطه‌ی داده شده $f(1)$ را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{x=1} f^2(1)+f(1)=12 \Rightarrow f^2(1)+f(1)-12=0 \Rightarrow (f(1)-3)(f(1)+4)=0$$

$$\xrightarrow{f>0} \begin{cases} f(1)=3 \to \text{ق ق} \ (*) \\ f(1)=-4 \to \text{غ ق ق}\end{cases}$$

حال از رابطه‌ی داده شده مشتق می‌گیریم تا $f'(1)$ به‌دست آید:

$$f^2(x)+f(x^2)=12x \longrightarrow 2f'(x)f(x)+2x\,f'(x^2)=12$$

$$\xrightarrow{x=1}$$

$$2f'(1)\,f(1)+2f'(1)=12 \xrightarrow{(*)} 2f'(1)\times 3+2f'(1)=12$$

$$\Rightarrow 8f'(1)=12 \Rightarrow f'(1)=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$